9.1.19 Užití binomické věty

Předpoklady: 9118

Často nám z binomického rozvoje stačí pouze jeden konkrétní člen.

Př. 1: Urči šestý člen binomického rozvoje $\left(2xy+\frac{x}{4y^2}\right)^{12}$. Získaný výraz uprav.

Binomický rozvoj začíná: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+...$ $\Rightarrow$ šestý člen bude mít jako dolní číslo binomického koeficientu číslo 5 $\Rightarrow$

$$\binom{12}{5}(2xy)^7\left(\frac{x}{4y^2}\right)^5=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot2^7x^7y^7\frac{x^5}{4^5y^{10}}=11\cdot9\cdot2^3\cdot2^7\frac{x^{12}}{2^{10}y^3}=\frac{99x^{12}}{y^3}.$$

Pedagogická poznámka: Vždy se najde někdo, kdo si neuvědomí, že mocniny *b* a spodní čísla v binomických koeficientech začínají od nuly a počítá sedmý člen místo šestého.

Př. 2: Urči člen binomického rozvoje $\left(xy-\frac{1}{2x^2}\right)^{10}$, který obsahuje y^7.

Neznámá *y* se vyskytuje pouze v prvním členu původního dvojčlenu $\Rightarrow$ hledáme člen rozvoje, který obsahuje sedmou mocninu prvního členu $\Rightarrow$ jde o čtvrtý člen (dolní číslo binomického koeficientu se rovná 3) $\Rightarrow$

$$\binom{10}{3}(xy)^7\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^3=\frac{10!}{7!\cdot3!}x^7y^7\left(-\frac{1}{2^3x^6}\right)=-\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}x^7y^7\frac{1}{8x^6}=-15xy^7.$$

Pedagogická poznámka: Pokud chcete žákům trochu zavařit nahraďte neznámé *x*, *y* neznámými *a*, *b*. Někteří budou totálně zmateni, jiní budou potřebovat dovysvětlit zadání.

Př. 3: Urči absolutní člen (člen, který neobsahuje proměnnou) binomického rozvoje $\left(2x^3+\frac{3}{2x}\right)^{12}$.

Absolutní člen = člen, který neobsahuje neznámou $\Rightarrow$ musíme najít taková čísla, aby platilo:

- pokrácení neznámé $\Rightarrow$ $\left(x^3\right)^a\left(\frac{1}{x}\right)^b=1$ $\Rightarrow$ $3a-b=0\Rightarrow b=3a$,
- $a+b=12$ (platnost binomické věty),

$\Rightarrow$ $a+3a=12\Rightarrow a=3;b=9$ $\Rightarrow$ hledáme desátý člen (pro $k=10$).

Hledaný člen: $\binom{12}{9}\left(2x^3\right)^3\left(\frac{3}{2x}\right)^9=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}2^3x^9\frac{3^9}{2^9x^9}=11\cdot5\cdot\frac{3^9}{2^4}$.

Pedagogická poznámka: Studenti počítají potřebné mocniny z hlavy. Řešení pomocí soustavy rovnic přesto ukazuji jako variantu pro obtížnější případ.

Pedagogická poznámka: Pokud je málo času, stačí spočítat u následujícího příkladu pouze jeden z obou bodů.

Př. 4: Pomocí binomické věty vyjádři v algebraickém tvaru komplexní čísla:

a) $(1-i)^7$, b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

a)

$$(1-i)^7=\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}1^6(-i)^1+\binom{7}{2}1^5(-i)^2+\binom{7}{3}1^4(-i)^3+\binom{7}{4}1^3(-i)^4+\binom{7}{5}1^2(-i)^5+$$

$$+\binom{7}{6}1(-i)^6+\binom{7}{7}(-i)^7=1-7i+21i^2-35i^3+35i^4-21i^5+7i^6-i^7=$$

$$=1-7i-21+35i+35-21i-7+i=8+8i$$

b)

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=$$

$$=\binom{5}{0}\left(\sqrt{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\sqrt{3}\right)^4(-i)^1+\binom{5}{2}\left(\sqrt{3}\right)^3(-i)^2+\binom{5}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2(-i)^3+\binom{5}{4}\left(\sqrt{3}\right)(-i)^4+\binom{5}{5}(-i)^5=$$

$$=9\sqrt{3}-5\cdot 9i+10\cdot 3\sqrt{3}\cdot i^2-10\cdot 3i^3+5\sqrt{3}\cdot i^4-i^5=9\sqrt{3}-45i-30\sqrt{3}+30i+5\sqrt{3}-i=$$

$$=-16\sqrt{3}-16i$$

Pomocí binomické věty je možné spočítat i operace, které by jinak (a bez kalkulačky) byly značným oříškem.

Př. 5: Vypočti $1{,}01^5$ bez kalkulačky pomocí binomické věty.

Problém: V zadání není nikde vidět binomická věta $\Rightarrow$ musíme vytvořit dvojčlen. $\Rightarrow$

$$1{,}01^5=(1+0{,}01)^5=\left(1+10^{-2}\right)^5=$$

$$=\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}1^4\left(10^{-2}\right)^1+\binom{5}{2}1^3\left(10^{-2}\right)^2+\binom{5}{3}1^2\left(10^{-2}\right)^3+\binom{5}{4}1\left(10^{-2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(10^{-2}\right)^5=$$

$$=1+5\cdot 10^{-2}+10\cdot 10^{-4}+10\cdot 10^{-6}+5\cdot 10^{-8}+10^{-10}=1{,}0510100501$$

Pedagogická poznámka: Většinu následujících příkladů není naprostá většina studentů schopna vyřešit samostatně. Nemá cenu je nechávat příliš dlouho se trápit, lepší je popostrčit třídu a nechat ji příklady dopočítat. Navíc na ně ani nezbývá příliš mnoho času.

Př. 6: Urči součet $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

Součet připomíná binomický rozvoj, kterému chybí mocniny *a* a *b*. Přesně takto by však rozvoj vypadal, kdyby platilo $a=b=1 \Rightarrow$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=$$

$$=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n=(1+1)^n=2^n$$

Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet *k*-prvkových podmnožin množiny s *n* prvky $\Rightarrow$ výraz $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ udává počet všech podmnožin množiny *n* prvky, kterých je 2^n (jak jsme si říkali, když jsme probírali variace s opakováním).

Př. 7: Pomocí binomické věty dokaž, že výraz 6^n-1 je pro každé přirozené číslo *n* dělitelný pěti.

Je to divné, ale asi to opravdu funguje:

$n=1 \Rightarrow 6^n-1=6^1-1=5$ - je dělitelné pěti

$n=2 \Rightarrow 6^n-1=6^2-1=35$ - je dělitelné pěti

$n=3 \Rightarrow 6^n-1=6^3-1=215$ - je dělitelné pěti

$\Rightarrow$ Hledáme důkaz:

- dělitelnost 5 $\Rightarrow$ z výrazu 6^n-1 musíme vytknout 5 (zatím tam žádná není),
- výraz 6^n-1 neobsahuje binomickou větu, kterou máme použít,

$\Rightarrow$ napíšeme $6^n-1=(5+1)^n-1$ a máme obojí (pětku i binomickou větu).

Použijeme binomickou větu:

$$(5+1)^n-1=(a+b)^n=\left[\binom{n}{0}5^n+\binom{n}{1}5^{n-1}1^1+\binom{n}{2}5^{n-2}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n\right]-1=$$

$$=\binom{n}{0}5^n+\binom{n}{1}5^{n-1}1^1+\binom{n}{2}5^{n-2}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1}+\underbrace{\underbrace{\binom{n}{n}}_{1}1^n-1}_{0}=$$

$$=5\left[\binom{n}{0}5^{n-1}+\binom{n}{1}5^{n-2}+\binom{n}{2}5^{n-3}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\right]$$

Všechny členy binomického rozkladu obsahují mocniny pěti, kromě posledního, který se rovná 1 a odečte se s jedničkou, která stojí mimo binomický rozklad $\Rightarrow$ můžeme vytknout 5 a tedy výraz 6^n-1 je pro každé přirozené číslo *n* dělitelný pěti.

Poznámka: Trik použitý v předchozím příkladu se při důkazech dělitelnosti používá často.

Př. 8: Zaokrouhli číslo $1,01^7$ na tisíciny.

Půjdeme na to přes binomickou větu.

$1,01^7 = (1+0,01)^7 =$

$= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}1^6(10^{-2})^1 + \binom{7}{2}1^5(10^{-2})^2 + \binom{7}{3}1^4(10^{-2})^3 + \binom{7}{4}1^3(10^{-2})^4 +$

$+ \binom{7}{5}1^2(10^{-2})^5 + \binom{7}{6}1(10^{-2})^6 + \binom{7}{7}(10^{-2})^7 =$

$= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} + \binom{7}{3}10^{-6} + \binom{7}{4}10^{-8} + \binom{7}{5}10^{-10} + \binom{7}{6}10^{-12} + \binom{7}{7}10^{-14} =$

Členy binomického rozvoje se od leva doprava postupně zmenšují (kvůli zvětšující se záporné mocnině desítky) $\Rightarrow$ musíme najít nejmenší člen, který ještě ovlivňuje výsledek na tisíciny

$\Rightarrow$ zkusíme člen $\binom{7}{2}10^{-4} = 21\cdot 10^{-4}$ - členy více napravo jsou ještě menší $\Rightarrow$

$1,01^7 \doteq \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} = 1 + 7\cdot 10^{-2} + 21\cdot 10^{-4} = 1,0721 \doteq 1,072$.

Číslo $1,01^7$ zaokrouhlené na tisíciny se rovná 1,072.

Dodatek: V době předkalkulačkové byla jednou z nejdůležitějších oblastí užitné matematiky oblast přibližných výpočtů.

Jedním z nejběžnějších vzorců byl vztah: $(1+x)^n \doteq 1+nx$, používaný zejména v situacích, kdy $|x| \ll 1$ ($|x|$ je daleko menší než 1).

Pomocí binomické věty můžeme odhadnout chybu takového zanedbání.

$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}x + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n =$

$1 + nx + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$\Rightarrow$ Chyba zanedbání $\left|(1+x)^n - (1+nx)\right|$ je rovna absolutní hodnotě vynechaných členů binomického rozvoje:

$\left|(1+x)^n - (1+nx)\right| = \left|\binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right| = \left|x^2\right|\left|\binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \ldots + \binom{n}{n}x^{n-2}\right|$

platí: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| \Rightarrow$

$\left|(1+x)^n - (1+nx)\right| = \left|x^2\right|\left|\binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \ldots + \binom{n}{n}x^{n-2}\right| \le \left|x^2\right|\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \ldots + \binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right|\right]$

Dále víme, že $|x| < 1 \Rightarrow \binom{n}{3}|x| < \binom{n}{3}$, …, $\binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right| < \binom{n}{n}$, a ještě $\left|x^2\right| = x^2$

a tedy: $\left|x^2\right|\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \ldots + \binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right|\right] < x^2\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}\right]$.

Pro součet kombinačních čísel v závorce platí: $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n}<2^n$,

celkově tedy dostáváme: $\left|(1+x)^n-(1+nx)\right|<x^2\cdot 2^n$.

V konkrétním případě u příkladu 7 by horní odhad chyby vyšel:
$0,01^2\cdot 2^7=0,0128$.

Př. 9: Petáková:
strana 148/cvičení 83
strana 149/cvičení 86
strana 149/cvičení 90
strana 149/cvičení 92 a) c) e)
strana 149/cvičení 99 b) d)

Shrnutí: